Preparaduría VII

1.- Sea V el espacio con producto interno citado en el ejercicio 17 de la prepa VI. Sea $\mathfrak{D}$ el operador de derivación sobre V. Hallar $\mathfrak{D}^*$.

2.- Sea V el espacio con producto interno de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$. Sea P una matriz inversible y $\mathfrak{T}_P$ el operador de cambio de base $\mathfrak{T}_P(A) = P^{-1}AP$. Hallar el adjunto de $\mathfrak{T}_P$.

3.- Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita y sea E una proyección sobre V. Demuestre que V es autoadjunto si, y sólo si, $EE^* = E^*E$.

4.- Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{C}$, de dimensión finita. Sea $\mathfrak{T}$ un operador lineal sobre V. Demuestre que $\mathfrak{T}$ es autoadjunto si, y sólo si, $\langle \mathfrak{T}\alpha, \alpha\rangle$ es real, para todo α en V.

5.- Sean V y W espacios con producto interno sobre el mismo cuerpo y T una transformación lineal de V en W. Demuestre que T preserva productos internos si, y sólo si, $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$ para todo α en V. [use la identidad de polarización]. A un isomorfismo (lineal) que preserva productos internos lo llamaremos sencíllamente *isometría*. Un operador *unitario* es una isometría del espacio en sí mismo. Sea U un operador lineal sobre un espacio vectorial con producto interno V. Demuestre que U es unitario si, y sólo si, el adjunto U^* de U es su inverso.

6.- Sea V el espacio de las matrices $n \times n$ complejas con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$. Para cada $M \in V$, demuestre que el operador $\mathfrak{T}_M$, definido por $\mathfrak{T}_M(A) = MA$ es unitario si, y sólo si, M es una matriz unitaria.

7.- Sea V el espacio vectorial de los números complejos, sobre $\mathbb{R}$. Sea M_γ el operador lineal sobre V definido por $M_\gamma(\alpha) = \gamma\alpha$. i) Compruebe que $\langle \alpha, \beta\rangle = \operatorname{Re}\left(\alpha\bar{\beta}\right)$ define un producto interno sobre V. En los ejercicios siguientes, V lleva este producto interno. ii) Demuestre que dos espacios con producto interno de dimensión finita son isométricos si, y sólo si, son isomorfos. Dar entonces una isometría entre $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico y V. iii) Demuestre que $M_\gamma^* = M_{\bar{\gamma}}$. iv) Para cuáles γ es M_γ autoadjunto? unitario? v) Cuál es el determinante de M_γ? vi) Si T es un operador lineal sobre V, dar condiciones suficientes y necesarias para que sea un M_γ.

8.- Demuestre que todo operador unitario sobre $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico es o una rotación, o la composición de una rotación con la simetría por un eje. Hallar la adjunta de una rotación.

9.- En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico, sea W el plano generado por $\alpha = (1, 1, 1)$ y $\beta = (1, 1, -2)$. Sea U_θ el operador lineal definido geométricamente como la rotación con ángulo θ alrededor del eje ortogonal a W por el origen.

[Hay dos rotaciones, tome cualquiera de las dos]. Hallar la matriz de U_θ con respecto a la base canónica ordenada.

10.- Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita y W un subespacio de V. Entonces $V = W \oplus W^\perp$. Defina un operador lineal U así: $U\alpha = \beta - \gamma$, donde $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta \in W$, $\gamma \in W^\perp$. [Note que U está bien definida]. i) Demuestre que U es autoadjunto y unitario. ii) Si V es $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico, y W es el subespacio generado por el vector $(1, 0, 1)$. Hallar la matriz de U en la base canónica ordenada. iii) Demuestre que todo operador autoadjunto y unitario sobre V se genera de ésta forma a partir de un subespacio W de V.

11.- Sea V un espacio vectorial con producto interno. Un *movimiento rígido* es una funcion T, no necesariamente lineal, tal que $\|T\alpha - T\beta\| = \|\alpha - \beta\|$, para todo α, β en V. Demuestre que un movimiento rígido en $\mathbb{R}^2$ que fija el origen es una transformación lineal. Estudie entonces la estructura del grupo de movimientos rígidos sobre $\mathbb{R}^2$.

12.- Para cada una de las siguientes matrices reales simétricas, A, hallar una matriz ortogonal real P tal que $P^t AP$ es diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

13.- Sea $\mathcal{C}_H$ la curva que ocupa el locus de la ecuación $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$. Si los autovalores de la matriz asociada a esta forma cuadrática son t_1, t_2, demuestre que: i) Si t_1, t_2 son ambos mayores que cero, entonces $\mathcal{C}_H$ es una elipse. ii) Si ambos son menores que cero, entonces $\mathcal{C}_H$ es vacía. iii) Si tienen signos opuestos, entonces es una hipérbola.

Clasifique las curvas dadas por las ecuaciones: $x^2+2xy+y^2 = 1$; $2xy-y^2 = 1$; $4x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 = 1$.

14.- Hallar una ecuación en nuevas coordenadas de la forma $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2 = 1$ para la superficie cuadrática $-4x^2 + 2y^2 + 3yz + 2z^2 = 1$.